校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

（ $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ はすべての受験者が解答すること）

$\boxed{1}$

（1）	4点 ①は $y=a(x-4)^2+2$ と表される。これが点 $\left(1,\dfrac{1}{5}\right)$ を通るから，$\dfrac{1}{5}=a(1-4)^2+2$ これを解いて，$a=-\dfrac{1}{5}$　よって，①は $y=-\dfrac{1}{5}(x-4)^2+2=-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{8}{5}x-\dfrac{6}{5}$ ゆえに，$a=-\dfrac{1}{5}$，$b=\dfrac{8}{5}$，$c=-\dfrac{6}{5}$
（2）	4点 接点の y 座標は０であるから，$ax^2+bx+c=0$ $a\neq 0$ より $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ここで，①は x 軸と接するから $b^2-4ac=0$　よって $x=-\dfrac{b}{2a}$　以上より接点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ 0\right)$
（3）	4点 $y=2x^2+bx+2b=2\left(x+\dfrac{b}{4}\right)^2-\dfrac{b^2}{8}+2b$ であり，①のグラフは下に凸であるから， $x=-\dfrac{b}{4}$ で y の最小値は $m=-\dfrac{b^2}{8}+2b$ $m=-\dfrac{1}{8}(b-8)^2+8$　より　$b=8$ で m の最大値は８
（4）	4点 $y=ax^2-4ax+5=a(x-2)^2-4a+5$ （ｉ）$a>0$ のとき，グラフは下に凸であるから，$x=2$ で最小値は $-4a+5$ 　よって　$-4a+5=-1$ より　$a=\dfrac{3}{2}$　これは $a>0$ をみたす。 （ii）$a<0$ のとき，グラフは上に凸であるから，$x=5$ で最小値は $5a+5$ 　よって　$5a+5=-1$ より　$a=-\dfrac{6}{5}$　これは $a<0$ をみたす。 以上より，$a=\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{6}{5}$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

2

（１）		4点 6個の○と2個の｜を1列に並べる順列の総数に等しいから ${}_8C_6={}_8C_2=28$ （通り）
（２）		4点 $3^6=729$ （通り）
（３）	証明１	4点 （証明） 点Cを通り直線ADに平行な直線を引き，直線ABとの交点をEとおく。 AD∥ECより ∠BAD＝∠AEC ……① ∠CAD＝∠ACE ……② また，AD は ∠A の二等分線より， ∠BAD＝∠CAD ……③ ①～③より，∠AEC＝∠ACE となり， △ACEは二等辺三角形であるから，AE＝AC ……④ 一方，AD∥EC より AB:AE＝BD:DC ④より AB:AC＝BD:DC が成り立つ。 （証明終わり）
	証明２	4点 （証明） $\angle BAD=\angle CAD=\theta$ とおくと， $\triangle ABD:\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\theta:\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\theta=AB:AC$ ……⑤ また，点 A から辺BCに垂線AHをおろすと， $\triangle ABD:\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AH:\frac{1}{2}\cdot CD\cdot AH=BD:CD$ ……⑥ ⑤，⑥より AB:AC＝BD:DC が成り立つ。 （証明終わり）

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

3

（１）	①	ア　[2点]	②	オ　[2点]
（２）	イ　，　カ　　（完答）　[4点]			

（３） [4点]

（証明）

$$s_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{x_k{}^2 - 2x_k\overline{x} + (\overline{x})^2\right\}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2 - 2\overline{x}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k + \frac{1}{n}\cdot n(\overline{x})^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2 - 2(\overline{x})^2 + (\overline{x})^2$$
$$= \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

（証明終わり）

（４） [4点]

平均が５であるから　$\dfrac{-14+16+21+a+b}{5}=5$

よって　$a+b=2$　…　①

分散が164であるから　$\dfrac{(-14)^2+16^2+21^2+a^2+b^2}{5}-5^2=164$

よって　$a^2+b^2=52$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ より　$52=2^2-2ab$

よって　$ab=-24$　…　②

①，②より，a と b は２次方程式 $x^2-2x-24=0$ の２つの解である。

$x^2-2x-24=0$ より

$(x+4)(x-6)=0$ であるから　$x=-4,\ 6$

$a<b$ であるから　$a=-4,\ b=6$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

4　（中学校受験者のみ解答すること）

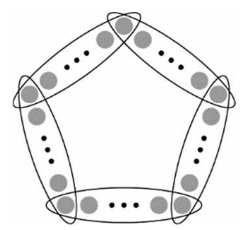
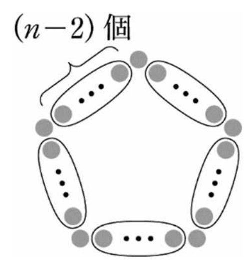
（１）		3点 $216=2^3\times3^3=2^2\times3^2\times2\times3$ $216n$ が (自然数)^2 になるには，$n=2\times3$ となればよい。 よって，$n=6$
（２）		4点 【体積】 上の円錐の部分の体積は，$3\times3\times\pi\times4\times\frac{1}{3}=12\pi$ 下の半球の部分の体積は，$\frac{4}{3}\pi\times3^3\times\frac{1}{2}=18\pi$ よって，$12\pi+18\pi=30\pi$　　答　30π cm^3 【表面積】 上の円錐の部分における側面の扇形の面積は，$5\times5\times\pi\times\frac{3}{5}=15\pi$ 下の半球の部分の表面積は，$4\pi\times3^2\times\frac{1}{2}=18\pi$ よって，$15\pi+18\pi=33\pi$　　答　33π cm^2
（３）	①	4点 【∠AOP】 360°÷30 秒より，点 P は１秒で 12°進む よって，５秒後は 12°×5＝60°　　答　∠AOP＝60° 【線分 PB】 ∠AOP＝60°，OA=OP より，△AOP は正三角形だから，AP=OA=5cm △PAB は∠PAB=90° の直角三角形だから， 三平方の定理より，$\mathrm{PB}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$　　答　$5\sqrt{5}$ cm
	②	4点 x 秒後の∠AOP と∠BO´Q の大きさは，∠AOP＝$12x$°，∠BO´Q＝$8x$° 点 P が１周する間に（$0<x\leqq30$），OP//O´Q となるのは，∠AOP＋∠BO´Q＝$12x$°＋$8x$°＝$20x$° が 180°の倍数となるときで，n を自然数とすると $20x=180n$ より，$x=9n$ のとき よって，9×1＝9 秒後，9×2＝18 秒後，9×3＝27 秒後 答　9 秒後，18 秒後，27 秒後
	③	4点 線分 PQ の長さが最小になるのは，線分 PQ が円柱の母線と一致するときだから，PQ=AB=10cm 点 Q を通る円柱の母線と円 O の円周との交点を C とすると，PC⊥QC だから， △PQC で三平方の定理を用いると，$\mathrm{PQ}=\sqrt{\mathrm{QC}^2+\mathrm{PC}^2}=\sqrt{10^2+\mathrm{PC}^2}=\sqrt{100+\mathrm{PC}^2}$ よって，線分 PQ の長さが最大になるのは，線分 PC の長さが最大になるときで， それは線分 PC が円 O の直径と一致するとき。 そのときの線分 PQ の長さは，$\mathrm{PQ}=\sqrt{100+\mathrm{PC}^2}=\sqrt{100+10^2}=10\sqrt{2}$ 答　$\alpha=10$，$\beta=10\sqrt{2}$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

$\boxed{5}$（中学校受験者のみ解答すること）

<table>
<tr><td rowspan="2">（１）</td><td>説明１</td><td>$\boxed{4点}$
（例）
　碁石を図のように囲むと，１つの囲みに碁石が n 個あり，その囲みが５つあるから $5n$ 個になる。
　このとき，５つの頂点の碁石の数を２回数えているから，並べた碁石の数は $5n$ 個より５個少ない。
　したがって，碁石の数は $(5n-5)$ 個となる。
</td></tr>
<tr><td>説明２</td><td>$\boxed{4点}$
（例）
　碁石を図のように囲むと，１つの囲みに碁石が $(n-2)$ 個あり，その囲みが５つあるから $5(n-2)$ 個になる。
　このとき，５つの頂点の碁石の数を数えていないから，並べた碁石の数は $5(n-2)$ 個より５個多い。
　したがって，碁石の数は $\{5(n-2)+5\}$ 個となる。
</td></tr>
<tr><td>（２）</td><td colspan="2">$\boxed{4点}$
（証明）
辺 AD を延長して，辺 BC との交点を E とする。
三角形の外角は，それととなり合わない２つの内角の和に等しいから，
△ABE で　∠DEC＝∠A＋∠B
△DEC で　∠ADC＝∠DEC＋∠C
したがって，∠ADC＝∠A＋∠B＋∠C　　　（証明終わり）</td></tr>
<tr><td>（３）</td><td colspan="2">$\boxed{3点}$
（証明）
底面の対角線の長さを x とすると，$x^2=a^2+b^2$
直方体の対角線の長さを y とすると，$y^2=x^2+c^2=a^2+b^2+c^2$
$y>0$ であるから，$y=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$　　　（証明終わり）</td></tr>
</table>

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

6　（中学校受験者のみ解答すること）

（１）	①	数学的な推論	②	論理的	③	表
	④	式	⑤	グラフ	⑥	数学的活動
	⑦	評価・改善	２点×５＝１０点　※③～⑤は全て正解して２点			
（２）	①	４点 （例） ・　コマＡの方がコマＢより 55 秒以上の階級の度数の合計が大きいので，コマＡの方がより長い時間回る。 ・　コマＢの方がコマＡより 45 秒未満の階級の度数の合計が小さいので，コマＢの方がより長い時間回る。 ・　中央値を求めると，コマＡは 52.5 秒 ，コマＢは 47.5 秒となり，コマＡの方が大きいので，コマＡの方がより長い時間回る。				
	②	４点 （例） ・　箱ひげ図を見ると，最大値と中央値は，低位置よりも中位置や高位置の方が大きいから，低位置よりも中位置，高位置の方がより長い時間回ると予想される。次に，中位置と高位置の箱ひげ図を比較すると，中位置の方が，最小値や第１四分位数が高位置よりも大きいから，中位置から回す方がより長い時間回ると予想される。 ・　箱ひげ図を見ると，最大値と中央値は，低位置よりも中位置や高位置の方が大きいから，低位置よりも中位置，高位置の方がより長い時間回ると予想される。次に，中位置と高位置の箱ひげ図を比較すると，箱が示す区間は高位置よりも中位置の方が短い。データの個数は中央値を中心とする全体の約半数であり，データの散らばりの程度は，高位置よりも中位置の方が小さい。よって，中位置から回す方がより長い時間回ると予想される。				

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

7　（高等学校受験者のみ解答すること）

（１）	4点 $\omega^3=1$ より $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$， $\omega \fallingdotseq 1$ であるから $\omega^2+\omega+1=0$ また， $\omega^3=1$， $\omega^2=-\omega-1$ であるから， $\dfrac{\omega^{10}-\omega^5+1}{\omega+1}=\dfrac{\omega\cdot(\omega^3)^3-\omega^2\cdot\omega^3+1}{\omega+1}=\dfrac{\omega-\omega^2+1}{\omega+1}=\dfrac{\omega-(-\omega-1)+1}{\omega+1}=\dfrac{2(\omega+1)}{\omega+1}=2$
（２）	4点 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>1$ より $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ であるから， $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5}{6}\pi$， $\dfrac{13}{6}\pi<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ ゆえに， $0\leqq x<\dfrac{7}{12}\pi$， $\dfrac{23}{12}\pi<x<2\pi$
（３）	4点 等式より $f(x)=3x+x\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf(t)dt$　ここで $\int_0^1 f(t)dt=a$， $\int_0^1 tf(t)=b$ （a， b は定数）とおくと $f(x)=3x+ax-b=(3+a)x-b$ と表される。 $a=\int_0^1\{(3+a)t-b\}dt=\left[\dfrac{3+a}{2}t^2-bt\right]_0^1=\dfrac{3+a}{2}-b$　より　$a+2b=3$　…① $b=\int_0^1\{(3+a)t^2-bt\}dt=\left[\dfrac{3+a}{3}t^3-\dfrac{b}{2}t^2\right]_0^1=\dfrac{3+a}{3}-\dfrac{b}{2}$　より　$2a-9b=-6$　…② ①，②を解くと　$a=\dfrac{15}{13}$， $b=\dfrac{12}{13}$　よって $f(x)=3x+\dfrac{15}{13}x-\dfrac{12}{13}$ より $f(x)=\dfrac{54}{13}x-\dfrac{12}{13}$
（４）	4点 $\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 2)$， $\overrightarrow{AC}=(-2,\ 1,-2)$ であるから， $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(-2)^2+4^2+2^2}=2\sqrt{6}$， $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=3$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\cdot(-2)+4\cdot1+2\cdot(-2)=4$ よって$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2\lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{6})^2\cdot3^2-4^2}=5\sqrt{2}$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

$\boxed{8}$　（高等学校受験者のみ解答すること）

（１）　［4点］

$f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-(1-x)=\dfrac{1-(1-x)(1+x)}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}>0$ （$\because x>0$ ）

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ の範囲で常に増加する。

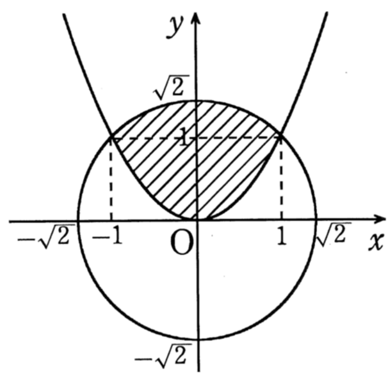
よって　$x>0$ のとき，$f(x)>f(0)=0$　つまり　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)$ が成り立つ。

（２）

①　［4点］

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=x^2 \end{cases}$ を解くと $(x,\ y)=(1,\ 1)$ または $(-1,\ 1)$

領域 D を図示すると右図の斜線部分であり，境界線を含む。



②　［4点］

A(1，1)，B(−1，1)とおくと

$S=$(扇形OAB)+(直線ＯＡと $y=x^2$ で囲まれた部分)×2　である。

(扇形OABの面積)$=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

(直線ＯＡと $y=x^2$ で囲まれた部分の面積)

$=\displaystyle\int_0^1(x-x^2)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

であるから，

$S=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{6}\cdot 2=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}$

③　［4点］

$$V=\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-y^2)dy\ =\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1+\pi\left[2y-\frac{y^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-0\right)+\pi\left\{2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\left(2-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{\pi}{2}+\pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{6}\right)\pi$$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑥　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

9　（高等学校受験者のみ解答すること）

（１）

①	数学的活動	②	統計的な推測	③	確率分布
④	評価・改善	⑤	創造性	２点×５＝$\boxed{\text{１０点}}$	

（２）

【解答の不十分な点】　$\boxed{\text{3点}}$

$n=1$ から 3 まで成り立つことを確かめているが，$n\geqq 4$ について成り立つことを確かめていない。
よってすべての自然数 n について成り立つことの証明にはならない。

【正しい解答】　$\boxed{\text{7点}}$

（証明）

数学的帰納法により証明する。

［１］$n=1$ のとき，

左辺 $=1^2=1$，右辺 $=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$

よって，（A）は成り立つ。

［２］$n=k$（kは自然数）のとき，（A）が成り立つ，つまり，

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$　が成り立つと仮定すると，

$n=k+1$　のとき，

（A）の左辺$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}=$（A）の右辺

よって，$n=k+1$ のときも（A）は成り立つ。

［１］［２］よりすべての自然数 n について（A）は成り立つ。　　　（証明終わり）