校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　数　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

（ 1 ～ 3 はすべての受験者が解答すること）

※何も記入しないこと

1

（１）

① 3点

$f(x)=(x-\sqrt{3})(x-2)+(x-2)(x-\sqrt{5})+(x-\sqrt{5})(x-\sqrt{3})$

$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$\sqrt{3}-2<0$，$\sqrt{3}-\sqrt{5}<0$ より，

$f(\sqrt{3})$の符号は正である 。

② 3点

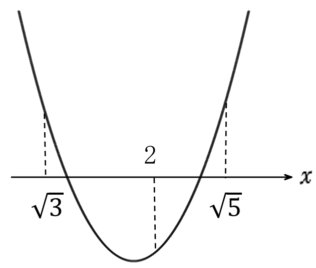
$f(2)=(2-\sqrt{5})(2-\sqrt{3})<0$

$f(\sqrt{5})=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-2)>0$

$f(x)$ の x^2 の係数は３であるから，

$y=f(x)$のグラフは右の図のようになる。

よって， $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は２個



（２）

記号 2点

イ

理由 4点

①に $x=a$，$x=b$，$x=c$ を代入すると

$f(a)=(a-b)(a-c)$

$f(b)=(b-c)(b-a)$

$f(c)=(c-a)(c-b)$

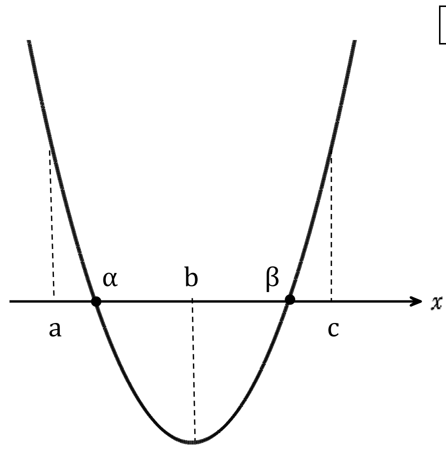
$a<b<c$ より，

$f(a)>0$，$f(b)<0$，$f(c)>0$

$f(x)$ の x^2 の係数は３であるから，

$y=f(x)$のグラフは右の図のようになる。

よって $a<\alpha<b<\beta<c$



（３） 4点

$f(x)=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca$ と変形できる。

$f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

方程式 $f(x)=0$ が重解をもつとき， $D=0$ であるから，

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

これより， $a-b=b-c=c-a=0$

よって， $a=b=c$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

2

※何も記入しないこと

（1） 5点

△ABD : △ADC

$= \frac{1}{2}AB \cdot AD\sin 20^\circ : \frac{1}{2}AD \cdot AC\sin 40^\circ$

$= 5\sin 20^\circ : 2\sin 40^\circ$

$= 5\cos 70^\circ : 2\cos 50^\circ$

$= 5 \cdot 0.3420 : 2 \cdot 0.6428$

$= 1.710 : 1.2856$

よって，△ABD＞△ADCであるから，BD＞DC

つまりBD＞DE＋ECであるから，最も長いのは線分BD

（2） 5点

$\angle ACB = 90^\circ$ であるから，$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

また，$BD = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

方べきの定理より，$DE \cdot \sqrt{13} = 2 \cdot 2$　よって，$DE = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$ であるから，

$BE = BD + DE = \sqrt{13} + \frac{4\sqrt{13}}{13} = \frac{17\sqrt{13}}{13}$

また，$\triangle ABC : \triangle ACE = DB : DE = \sqrt{13} : \frac{4\sqrt{13}}{13} = 13 : 4$ より

$\triangle ACE = \frac{4}{13}\triangle ABC = \frac{4}{13} \cdot 6 = \frac{24}{13}$

よって，四角形ABCEの面積は

$\triangle ABC + \triangle ACE = 6 + \frac{24}{13} = \frac{102}{13}$

（3） 6点

直角三角形の斜辺は a であり，これは外接円の直径であるから，$a = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

また，右の図より，$a = \left(b - \frac{1}{4}\right) + \left(c - \frac{1}{4}\right)$　すなわち　$b + c = 2$ …①

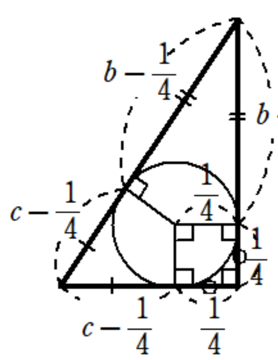
三平方の定理により，$b^2 + c^2 = \frac{9}{4}$　すなわち　$(b+c)^2 - 2bc = \frac{9}{4}$

①より $4 - 2bc = \frac{9}{4}$ から $bc = \frac{7}{8}$ …②

①，②より b，c は２次方程式 $t^2 - 2t + \frac{7}{8} = 0$ の解である。

これを解くと，$t = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{7}{8}} = 1 \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$

$b \geqq c$ であるから，$b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$，$c = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$



校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

※何も記入しないこと

3

（１）	4点 さいころを１回投げるとき，６の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，奇数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$， ２または４の目が出る確率は $\frac{1}{3}$ であるから，求める確率は $\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{5}{72}$
（２）	4点 $ax^2+bx-1=0$ より，　$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4a}}{2a}$ 有理数の解をもつためには，$b^2+4a=k^2$（k は整数）を満たせばよい。 $b=1$ のとき，$a=2,6$ $b=2$ のとき，$a=3$ $b=3$ のとき，$a=4$ $b=4$ のとき，$a=5$ $b=5$ のとき，$a=6$ $b=6$ のとき，条件を満たす a は存在しない。 よって，求める確率は $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
（３）	4点 赤玉が１個，白玉が１個出る確率は $\frac{{}_nC_1\cdot{}_{10-n}C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{2n(10-n)}{10\cdot9}=\frac{n(10-n)}{45}$ この確率が $\frac{1}{2}$ 以上であるから $\frac{n(10-n)}{45}\geqq\frac{1}{2}$ $n(10-n)\geqq\frac{45}{2}=22.5$ これを満たす整数 n の値の範囲は $4\leqq n\leqq6$
（４）	4点 この図形に含まれるすべての長方形は， ${}_6C_2\times{}_7C_2=315$（個） Aを含む長方形の個数を考える。 縦の線分は，Aに対して左側にある３本から１本選び，それに対して右側にある４本から１本選べばよいので， ${}_3C_1\times{}_4C_1=12$（通り） 横の線分は，Aに対して上にある２本から１本選び，それに対して下側にある４本から１本選べばよいので， ${}_2C_1\times{}_4C_1=8$（通り） よって，$315-12\times8=219$（個）

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

※何も記入しないこと

$\boxed{4}$ （**中学校受験者のみ解答すること**）

（1）		$x^2+3xy+2y^2-5x-7y+6$ $=x^2+(3y-5)x+(2y^2-7y+6)$ $=x^2+(3y-5)x+(y-2)(2y-3)$ $=\{x+(y-2)\}\{x+(2y-3)\}$ $=(x+y-2)(x+2y-3)$　３点
（2）		$1<\sqrt{3}<2$ であるから，$-2<-\sqrt{3}<-1$　３点 各辺に３を加えて，$1<3-\sqrt{3}<2$ したがって，整数部分は $a=1$ 整数部分が１であるから，小数部分 b は $b=\left(3-\sqrt{3}\right)-1=2-\sqrt{3}$ $\dfrac{1}{a+b-1}+\dfrac{1}{a-b+3}=\dfrac{1}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)-1}+\dfrac{1}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)+3}$ $=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)+(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{4}{4-3}=4$
（3）		変化の割合は，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ で表される。　３点 ２次関数 $y=ax^2$ で，xの値が p から q まで増加するときの x の増加量は $q-p$ ，y の増加量は aq^2-ap^2 であるから，変化の割合は， $\dfrac{aq^2-ap^2}{q-p}=\dfrac{a(q^2-p^2)}{q-p}=\dfrac{a(q+p)(q-p)}{q-p}=a(q+p)=a(p+q)$ となる。
（4）	①	△APQ はAP＝AQ の二等辺三角形　３点 △BCD で，点 P，Q はそれぞれ辺 BC，CD の中点だから，中点連結定理より，PQ＝４cm 点 A から線分 PQ へ垂線 AH を引くと，二等辺三角形の頂角からの垂線は底辺を２等分するから， PH＝２cm △APH で三平方の定理を用いると，AH＝$\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{PH}^2}=2\sqrt{11}$ cm よって，△APQ＝$4\times2\sqrt{11}\times\frac{1}{2}$＝$4\sqrt{11}$　　答　$4\sqrt{11}$　cm^2
	②	△APQ の面積が $4\sqrt{11}$cm^2 であるから，AP を底辺として考えると，　４点 RQ は高さであるから，RQ＝$\frac{2\sqrt{33}}{3}$ cm △PQR で三平方の定理を用いると，PR＝$\sqrt{\mathrm{PQ}^2-\mathrm{QR}^2}=\sqrt{4^2-(\frac{2\sqrt{33}}{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm 点 R から線分 PQ へ垂線 RI を引くと，RI//AH であるから， RI : AH＝PR : AP＝$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ：$4\sqrt{3}$ ＝１：６ 三角錐 RBCD と正四面体 ABCD は底面 BCD が共通だから，体積比は高さの比に等しい。 よって，三角錐 RBCD の体積は，正四面体 ABCD の体積の $\frac{1}{6}$ 倍である。

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

5　**（中学校受験者のみ解答すること）**

※何も記入しないこと

（１）　4点

$\sqrt{2}$ が無理数でない，すなわち $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。

このとき，$\sqrt{2}$ は，１以外の正の公約数をもたない自然数 m ，n を用いて，$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ …① と表される。

①から $m=\sqrt{2}n$ ，両辺を２乗すると $m^2=2n^2$ …②

よって，m^2 は偶数であるから，m も偶数である。

ゆえに，m は k を自然数として，$m=2k$ …③と表される。

③を②に代入すると $4k^2=2n^2$ よって $n^2=2k^2$

ゆえに，n^2 は偶数であるから，n も偶数である。

m と n がともに偶数となることは，m と n が１以外の正の公約数をもたないことに矛盾する。

よって，$\sqrt{2}$ は無理数である。

（２）　4点

直径 AD を引くと

∠DAT＝90°であるから∠BAT＝90°－∠BAD　…①

∠ACD＝90°であるから∠ACB＝90°－∠BCD　…②

∠BAD，∠BCD は，ともに $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ に対する円周角だから

∠BAD＝∠BCD　…③

①～③より　∠BAT＝∠ACB

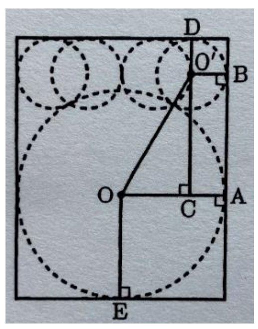
（３）

①　3点

球の半径は６cm であるから，$\frac{4}{3}\pi\times 6^3=288\pi$

答　288π　cm^3

②　5点



右の図のように大きな球の中心をO，１番右の小さな球の中心をO′とする。

また，点O，O′よりそれぞれ円柱の側面に垂線 OA，O′Bを引き，点O′を通り，側面と平行な直線を引き，OAとの交点をCとする。

△OO′C で，

OO′＝６＋２＝８（cm），OC＝OA－O′B＝６－２＝４（cm）であるから，

三平方の定理より，$\mathrm{O'C}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$（cm）

角錐の底面は１辺が４cm の正六角形だから，$\left(4\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)\times 6\times 4\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=96$（$\mathrm{cm}^3$）

答　96　cm^3

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

6　（中学校受験者のみ解答すること）

※何も記入しないこと

（１）	①	数理的	②	表現・処理	③	考察
	④	見通し	⑤	統合的・発展的	２点×５＝10点	

（２）	①	5点 図１を組み立ててできる円柱は，底面の円の半径が a cm，高さが h cm だから， $X=\pi a^2 \times h=\pi a^2 h$ 図２を組み立ててできる円柱は，底面の円の半径が b cm，高さが h cm だから， $Y=\pi b^2 \times h=\pi b^2 h$ よって，$X-Y=\pi a^2 h-\pi b^2 h=\pi h(a^2-b^2)=\pi h(a+b)(a-b)$
	②	5点 $W=X+Y=\pi a^2 h+\pi b^2 h$　…① 図４の円柱の底面の円周は，図３の AH と等しい。 AH＝AD＋DH＝$2\pi a+2\pi b$＝$2\pi(a+b)$（cm） よって，図４の円柱の底面の半径は $(a+b)$cm，高さは h cm だから， $Z=\pi(a+b)^2 \times h=\pi a^2 h+2\pi abh+\pi b^2 h$　…② ①，②より， $Z-W=(\pi a^2 h+2\pi abh+\pi b^2 h)-(\pi a^2 h+\pi b^2 h)=2\pi abh$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

7　（高等学校受験者のみ解答すること）

※何も記入しないこと

（１）	4点 赤玉の出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$ に従うから， X の平均は $E(X)=400\cdot\frac{1}{5}=80$，$X$ の分散は $V(X)=400\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=64$ 400 回という操作の回数は十分に大きいから，X は近似的に正規分布 $N(80, 8^2)$ に従う。 $Z=\frac{X-80}{8}$ とすると，Z は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。 $P(64\leqq X\leqq 96)=P(-2\leqq Z\leqq 2)=2\cdot P(0\leqq X\leqq 2)=2\cdot 0.4772=0.9544$
（２）	4点 $\log_a b=p$ とおくと，$a^p=b$ であり， 両辺に底 c の対数をとると $\log_c a^p=\log_c b$　　すなわち，$p\cdot\log_c a=\log_c b$ $a\fallingdotseq 1$ より $\log_c a\fallingdotseq 0$ であるから，$p=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ よって　$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ は成り立つ。
（３）	4点 $\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x$，$\cos y=\frac{1}{2}-\cos x$ …① を $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ に代入して， $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)^2=1$　整理すると，$\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$ よって，$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}<2\pi+\frac{\pi}{6}$ であるから，$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$　ゆえに，$x=0, \frac{2}{3}\pi$ ①より，$x=0$ のとき，$\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos y=-\frac{1}{2}$ より，$y=\frac{2}{3}\pi$ $x=\frac{2}{3}\pi$ のとき，$\sin y=0$，$\cos y=1$ より $y=0$ 以上より，$(x, y)=\left(0, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{2}{3}\pi, 0\right)$
（４）	4点 $\gamma-\beta=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)(\alpha-\beta)$ であるから， $\gamma=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{3+i-(2-i)\}+2-i$ $=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(1+2i)+2-i$ $=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

※何も記入しないこと

$\boxed{8}$　（高等学校受験者のみ解答すること）

（１）　6点

$y'=1+2\cos x$

$0<x<2\pi$ において，$y'=0$ とすると

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ より　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

y の増減表は右のようになる。

x	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	$\frac{4}{3}\pi$	…	2π
y'		＋	0	－	0	＋	
y		↗	極大	↘	極小	↗	

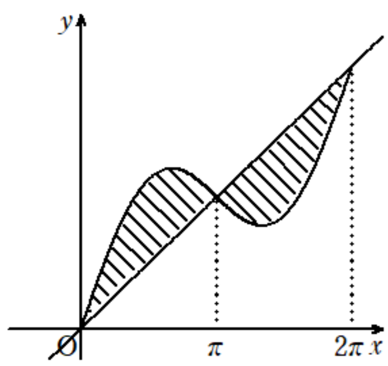
よって　$x=\dfrac{2}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{2}{3}\pi+2\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$，

$x=\dfrac{4}{3}\pi$ で極小値 $\dfrac{4}{3}\pi+2\sin\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

（２）　１０点

$x=x+2\sin x$ より $x=0,\pi,2\pi$

曲線（＊）と直線 $y=x$ で囲まれた部分の領域を図示すると，右図の斜線部分であり，境界線を含む。



$$V=\pi\int_0^{\pi}\{(x+2\sin x)^2-x^2\}dx+\pi\int_{\pi}^{2\pi}\{x^2-(x+2\sin x)^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}(4x\sin x+4\sin^2 x)dx+\pi\int_{2\pi}^{\pi}(4x\sin x+4\sin^2 x)dx$$

$$=4\pi\underbrace{\int_0^{\pi}(x\sin x+\sin^2 x)dx}_{①}+4\pi\underbrace{\int_{2\pi}^{\pi}(x\sin x+\sin^2 x)dx}_{②}$$

ここで

$$\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C_1,$$

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C_2$$ （C_1，C_2 は積分定数）

であるから，

$$①=\left[-x\cos x+\sin x+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi$$

$$②=\left[-x\cos x+\sin x+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{2\pi}^{\pi}=\frac{5}{2}\pi$$

よって，$V=4\pi\cdot\dfrac{3}{2}\pi+4\pi\cdot\dfrac{5}{2}\pi=16\pi^2$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

⑦　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

9　（高等学校受験者のみ解答すること）

※何も記入しないこと

（１）

①	体系的	②	数学化	③	表現・処理
④	多面的	⑤	表，式，グラフ	２点×５＝１０点	

（２）

【正しい解答】　6点

$$\begin{cases} 2x+y-2=0 & \cdots\cdots ① \\ mx-y-3m+1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①+②から　$(m+2)x-3m-1=0$

[1]　$m+2 \fallingdotseq 0$ のとき　$x=\dfrac{3m+1}{m+2}$

このとき，①から　$y=2-2\cdot\dfrac{3m+1}{m+2}=\dfrac{-4m+2}{m+2}$

①，②が $x>0$ かつ $y>0$ である解をもつとき　$\dfrac{3m+1}{m+2}>0$　かつ　$\dfrac{-4m+2}{m+2}>0$　……③

(i)　$m>-2$ のとき

③から　$3m+1>0$　かつ　$-4m+2>0$

よって　$-\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$　　これは $m>-2$ を満たす。

(ii)　$m<-2$ のとき

③から　$3m+1<0$　かつ　$-4m+2<0$

ゆえに，$m<-\dfrac{1}{3}$ かつ $m>\dfrac{1}{2}$ となり，共通範囲はない。

よって，これを満たす定数 m は存在しない。

[2]　$m+2=0$ のとき

②は $-2x-y+7=0$ となるが，これと ① を同時に満たす解は存在しない。

以上から，求める m の値の範囲は　$-\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$

【指導上の留意点】以下の２点について述べられていれば正解とする。　4点

a，b（$b \fallingdotseq 0$）を実数の定数とするとき，x についての１次方程式 $ax=b$ の解は

（ｉ）$a=0$ のとき，方程式は $0\cdot x=b$ と表されるから，解はない

（ⅱ）$a \fallingdotseq 0$ のとき，解は $x=\dfrac{b}{a}$

---

a，b を実数の定数とするとき

（ｉ）$a>b$，$c>0$ ならば $ac>bc$，$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

（ⅱ）$a>b$，$c<0$ ならば $ac<bc$，$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$