校種	中・高・特中・特高	受験番号	

④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

（$\boxed{1}$～$\boxed{3}$はすべての受験者が解答すること）

$\boxed{1}$ 16点

（1）	$y = ax^2 + bx + c$ が３点（１，５），（２，１），（３，－７）を通るから， ５＝ａ＋ｂ＋ｃ・・・・・① １＝４ａ＋２ｂ＋ｃ・・・② －７＝９ａ＋３ｂ＋ｃ・・・③ これを解くと，ａ＝－２，ｂ＝２，ｃ＝５・・・(答)　$\boxed{５点}$
（2）	①のグラフが上に凸だから，ａ＜０，また，ｙ軸との交点はｘ＝０を代入してｃ＞０ よって，ａ＜０，ｃ＞０・・・(答)　$\boxed{３点}$
（3）	①のグラフが常にｘ軸より上にくるためには，ａ＞０かつ ｙ＝０ としたときの判別式 $D = b^2 - 4ac$＜０ だとよい。よって，ａ＞０，$b^2 - 4ac$＜０・・・(答)　$\boxed{３点}$
（4）	$y = ax^2 + bx + 1 = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + 1 = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + 1 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 1$　$\boxed{５点}$ よって，頂点のｙ座標は$-\frac{b^2}{4a}+1$ これが－３＜ｙ＜１だとよいので， $-3 < -\frac{b^2}{4a} + 1 < 1$　ａ＞０より両辺を４ａ倍して －１２ａ＜$-b^2+4a$＜４ａ さらに，両辺から４ａを引いて，－１６ａ＜$-b^2$ ＜０ 両辺を－１倍して，０＜b^2＜１６ａ よって，０＜b^2＜１６ａ・・・(答)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

2

16点

<table>
<tr><td rowspan="2">（１）</td><td>ア</td><td>（－４，－３）
1点</td><td>イ</td><td>（３，４）
1点
※アとイは順不同</td><td>ウ</td><td>$x^2+y^2+25x-25y=0$
2点</td></tr>
<tr><td>エ</td><td colspan="3">ｋ（ｘ－ｙ＋１）＋$x^2+y^2-25=0$　または
ｘ－ｙ＋１＋ｋ（x^2+y^2-25）＝０
2点</td><td>オ</td><td>ｋ＝２５　または
$k=\frac{1}{25}$　2点</td></tr>
<tr><td>（２）</td><td colspan="6">（例）　4点
ｋについての恒等式だから，ｘ－ｙ＋１＝０ かつ x^2+y^2-25＝０ となる。つまり，これは連立方程式であるから２つの交点を必ず通ることになり，（１）の（　エ　）で表した方程式が，円①と直線②の交点を通る図形の方程式となるからである。</td></tr>
<tr><td>（３）</td><td colspan="6">$x^2+y^2-5+k(x^2+y^2+4x-4y-1)=0$　・・・③とおいて，（１，１）を代入して，　4点
１＋１－５＋ｋ（１＋１＋４－４－１）＝０
－３＋ｋ＝０，ｋ＝３　これを③に代入して，
$x^2+y^2-5+3(x^2+y^2+4x-4y-1)=0$
$4x^2+4y^2+12x-12y-8=0$ 両辺を４で割って，
$x^2+y^2+3x-3y-2=0$　・・・(答)</td></tr>
</table>

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

3

16 点

（１）	4点 正八角形と２辺を共有する三角形は，隣り合う２辺でできる三角形であるから， 求める個数は８（個）・・・（答）
（２）	4点 正八角形と１辺だけを共有する三角形は，各辺に対し，それに対する頂点として， ８つの頂点のうち，辺の両端および両隣の２頂点以外の頂点を選べるから， 求める個数は $(8-4)\cdot 8=32$（個）・・・(答)
（３）	4点 直角三角形は正八角形の外接円の直径の両端となる２点と残り１点を選んで作られる。 直径は４本あり，それぞれの直径に対して残りの頂点は６点から１点選ぶから，その選び 方は６通りある。したがって，求める個数は４×６＝２４（個）・・・(答)
（４）	4点 鈍角となる頂点を選び，鈍角の対辺を決める。鈍角となる頂点の選び方は８通りある。 仮に頂点 A_1 を選んだ場合，頂点Aの対辺は A_2A_3，A_2A_7，A_3A_8 の３通りある。 よって，求める個数は３×８＝２４（個）・・・(答)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

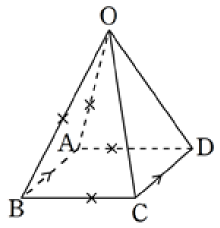
④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

4　**（中学校受験者のみ解答すること）**

16 点

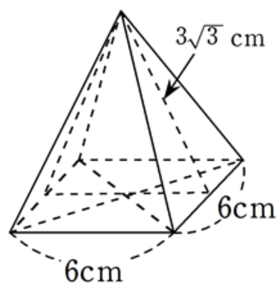
（１）　4点



線分ＡＢとねじれの位置にある辺は，

ＯＣとＯＤであるから，２本・・・(答)

（２）　4点



底面は１辺が６ｃｍの正方形のなので，底面積は，

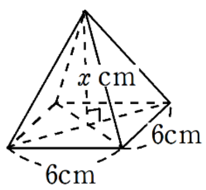
$6\times6=36$　　　$36\,cm^2$

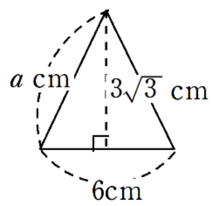
側面は底辺が６ｃｍ，高さが $3\sqrt{3}$ ｃｍの二等辺三角形が４枚あるので，側面積は，

$6\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times4=36\sqrt{3}$　　　$36\sqrt{3}\,cm^2$

よって，表面積は，　($36+36\sqrt{3}$)　cm^2 ・・・(答)

（３）　4点





側面の二等辺三角形の分からない辺を a ｃｍとすると，

$a^2=(3)^2+(3\sqrt{3})^2$

$a^2=9+27$　　$a^2=36$　　$a=\pm6$

$a>0$　より　$a=6$　　　６ｃｍ

この正四角錐の高さを x ｃｍ とおくと，

$x^2+(3\sqrt{2})^2=6^2$

$x^2+18=36$

$x^2=18$

$x=\pm3\sqrt{2}$

$x>0$ より　$x=3\sqrt{2}$

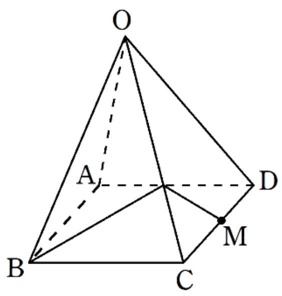
よって，高さは $3\sqrt{2}$ ｃｍ

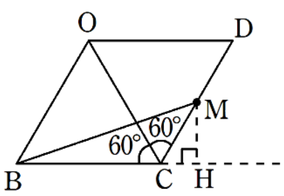
体積は，

$36\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=36\sqrt{2}$

$36\sqrt{2}\,cm^3$ ・・・(答)

（４）　4点





かけた糸の長さＢＭが最短となるときは，

ＢＭが直線になるときである。

(3) より，側面の三角形は１辺が６ｃｍの

正三角形であるから，　ＣＭ＝３ｃｍ

ＢＣの延長線上に点Ｍから垂線を下ろし，

その交点をＨとすると，∠ ＭＣＨ＝６０°

より，CH= $\frac{3}{2}$ ｃｍ，MH= $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ｃｍ

BM= x ｃｍ とすると，

$x^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$x^2=\frac{225}{4}+\frac{27}{4}$

$x^2=\frac{252}{4}=63$

$x=\pm3\sqrt{7}$　$x>0$ より $x=3\sqrt{7}$

よって，最短となる糸の長さは，

$3\sqrt{7}$ ｃｍ・・・(答)

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

$\boxed{5}$　**（中学校受験者のみ解答すること）**

16点

（１）		$\boxed{2点}$ **（例）**　・タクシーの料金は乗車距離の関数である。 ・郵便物の料金は重さの関数である。
（２）	①	分速５０ｍで，５４分歩くと頂上に着くので， ５０×５４＝２７００　よって，M駐車場からＡ山の頂上までの道のりは，２７００ｍ・・・（答）　$\boxed{2点}$
	②	休憩時間は，５４分から７０分までの時間なので， ７０－５４＝１６　　よって，頂上での休憩時間は，１６分・・・(答)　$\boxed{2点}$
	③	帰りは２７００－１９４０＝７６０　７６０ｍの道のりを　９０－７０＝２０ ２０分かけて進んでいることがわかるので，帰りの速さは，７６０÷２０＝３８ よって，帰りは　分速３８ｍ・・・(答)　$\boxed{2点}$
	④	帰りの直線の式を求めると，傾きは－３８なので， $y=-38x+b$　に（ 70 ， 2700 ）を代入 $2700=-38\times70+b$ $b=2700+2660$ $b=5360$ $y=-38x+5360$ $y=0$ を代入して， $0=-38x+5360$ $38x=5360$ $x=\frac{2680}{19}$ よって，M駐車場に到着するのは $\frac{2680}{19}$ 分・・・(答)　$\boxed{3点}$
	⑤	$\frac{2680}{19}$ は $141\frac{1}{19}$ なので，グラフから駐車料金は８００ 円とわかる。・・・(答)　$\boxed{2点}$
	⑥	駐車料金を８００円より１００円安い７００円にしたいので， グラフより，駐車時間を合計１２０分にすればよいことがわかる。 よって，帰りのグラフを（ 70，2700 ）と（ 120 ，0 ）を通る直線と考えればよい。 傾きは　$\frac{0-2700}{120-70}=\frac{-2700}{50}$ ＝－５４ よって帰りの速さは，最低でも 分速５４ｍ 以上にすればよい。　・・・(答)　$\boxed{3点}$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

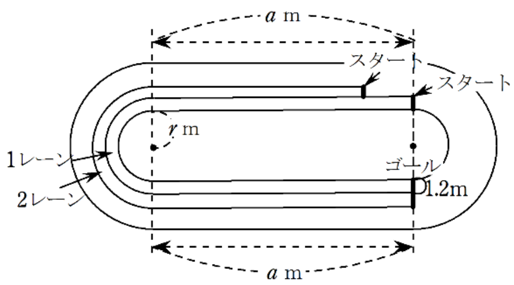
6　**（中学校受験者のみ解答すること）**

20 点

（1）	①	数量	②	表現・処理	③	論理的
	④	簡潔・明瞭・的確	⑤	評価・改善		２点×５＝$\boxed{１０点}$

（2）

①　$\boxed{６点}$



最も内側にある半円部分の半径を r m ，直線部分の長さを a mとすると，

第１レーンの内側の周の長さは，

$a\times 2+2\pi\times r\times\frac{1}{2}=2a+\pi r$　　　$2a+\pi r$（m）

第２レーンの内側の周の長さは，

$a\times 2+2\pi\times(r+1.2)\times\frac{1}{2}=2a+\pi r+1.2\pi$　　$2a+\pi r+1.2\pi$（m）

よって，第２レーンのスタートラインは第１レーンのスタートラインより

１．２π（m）だけ前にずらす必要がある。

②　$\boxed{４点}$

（例）

この授業で伝えたい，「数学的活動の楽しさや数学のよさ」とは，文字を用いた式を活用することによって，数量関係を一般化することができる。また，一般化した式を読み取ることで，第１レーンと第２レーンの差は半円部分の半径や直線部分の長さに関係なく決まることがわかる。

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

$\boxed{7}$　（高等学校受験者のみ解答すること）

16 点

（１）　$\boxed{5点}$

$$\begin{aligned}
&\cos 3\theta\\
&=\cos(2\theta+\theta)\\
&=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\
&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta\\
&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\
&=4\cos^3\theta-3\cos\theta
\end{aligned}$$

（２）　$\boxed{5点}$

$\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ より，　　$5\theta=2\pi$

$3\theta+2\theta=2\pi$

$3\theta=2\pi-2\theta$　より　　$\cos 3\theta=\cos(2\pi-2\theta)$

$\cos 3\theta=\cos 2\theta$

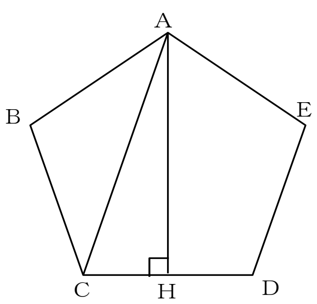
（１）より　　$4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\cos^2\theta-1$

$4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

$(\cos\theta-1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0$

$0<\cos\theta<1$　より　　$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$　・・・(答)

（３）　$\boxed{6点}$



三角形ＡＢＣはＢＡ＝ＢＣの二等辺三角形であり，

∠ＡＢＣ＝ $\dfrac{3}{5}\pi$ より∠ＢＡＣ＝∠ＢＣＡ＝$\dfrac{1}{5}\pi$ となる。

∠ＢＣＤ＝ $\dfrac{3}{5}\pi$ より∠ＡＣＨ＝∠ＢＣＤ－∠ＢＣＡ＝$\dfrac{2}{5}\pi$ となる。

直角三角形ＡＣＨにおいて ｃｏｓ∠ＡＣＨ＝ $\dfrac{CH}{AC}$ であるから，

$$\mathrm{AC}=\mathrm{CH}\times\frac{1}{\cos\angle ACH}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\frac{2}{5}\pi}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

・・・(答)

（全９枚中の８枚目）

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

$\boxed{8}$　（高等学校受験者のみ解答すること）

16 点

（１）　$\boxed{4点}$

$f(x)=x-\cos x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[0,\ \pi]$ で連続である。

また　$f(0)=0-\cos 0=-1<0$

$f(\pi)=\pi-\cos\pi=\pi+1>0$

よって，方程式 $f(x)=0$ すなわち $x-\cos x=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも１つの実数解をもつ。

（２）

①　$\boxed{4点}$

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$　から　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ のとき　$1-\log x=0$

すなわち　$x=e$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

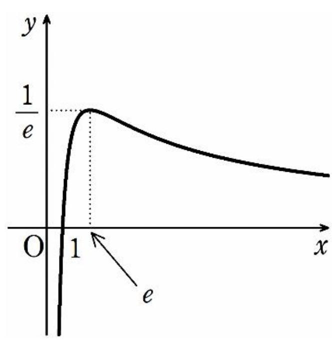
ゆえに，$f(x)$ は $x=e$ のとき極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

極小値はない。

②　$\boxed{4点}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\log x=-\infty$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは図のようになる。



③　$\boxed{4点}$

①，②より $f(x)$ は $x\geqq e$ の範囲で単調減少である。

$e<\pi$ であるから　$f(e)>f(\pi)$

すなわち　$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log\pi}{\pi}$

両辺に $e\pi>0$ をかけて 変形すると

$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$　　底 $e>1$ より　　$e^{\pi}>\pi^{e}$

校種	中・高・特中・特高	受験番号	

④　中学校・高等学校　　数　　学　解答例

（解答にあたっては，計算が必要なものはすべて途中の計算も書くこと）

$\boxed{9}$　（高等学校受験者のみ解答すること）

20 点

<table>
<tr><td rowspan="2">（１）</td><td>①</td><td>対数</td><td>②</td><td>表現・処理</td><td>①</td><td>論理的</td></tr>
<tr><td>④</td><td>簡潔・明瞭・的確</td><td>⑤</td><td>評価・改善</td><td colspan="2">２点×５＝$\boxed{１０点}$</td></tr>
</table>

（２）

【生徒への指示】　$\boxed{３点}$

（例）「もとの正方形の１辺の長さを変えることで，ｘはどのように変わるのかについて考えてみよう。」

「もとの正方形を長方形に変えて考えてみよう。」

【生徒が考えた課題と解答】　$\boxed{７点}$

（例）課題

たて１２ｃｍ，横２４ｃｍの長方形の４隅から１辺の長さがｘｃｍの同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない箱を作る。この箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の１辺の長さをいくらにすればよいか。

解答

箱の底面の１辺の長さは，１２－２ｘ，２４－２ｘ（０＜ｘ＜６）であるから，箱の容積をｙｃｍとすると，

ｙ＝ｘ（１２－２ｘ）（２４－２ｘ）＝$4x^3-72x^2+288x$

ｙ’＝$12x^2-144x+288$＝$12(x^2-12x+24)$

ｙ’＝０のとき，$x=6\pm2\sqrt{3}$　０＜ｘ＜６より $x=6-2\sqrt{3}$

このとき，増減表は次のようになる。

x	0	…	$6-2\sqrt{3}$	…	6
y’		−	0	+	
y		↘	$184\sqrt{3}+24$	↗	

よって，$x=6-2\sqrt{3}$ のとき，箱の容積は最大となる。

※このときの容積の最大値は，

ｙ＝$4x^3-72x^2+288x$＝$(x^2-12x+24)(4x-24)-96x+576$

より，ｙ＝$-96\left(6-2\sqrt{3}\right)+576=-576+192\sqrt{3}+576=192\sqrt{3}$ となる。